

BAB IV NILAI EIGEN DAN VEKTOR EIGEN

Definisi

Jika A adalah matrik $n \times n$, maka vektor tak nol x di dalam \mathbb{R}^n dinamakan **vektor eigen** dari A jika Ax adalah kelipatan skalar dari x , yaitu,

$$Ax = \lambda x$$

untuk suatu skalar λ . Skalar λ disebut **nilai eigen** dari A dan x dikatakan vektor eigen **yang bersesuaian** dengan λ .

Untuk mencari nilai eigen matrik A yang berukuran $n \times n$ maka kita menuliskannya kembali $Ax = \lambda x$ sebagai $Ax = \lambda Ix$

$$\Leftrightarrow (\lambda I - A)x = 0$$

Dan persamaan di atas akan mempunyai penyelesaian jika

$$\det(\lambda I - A) = 0 \quad \dots\dots\dots(6.1)$$

Persamaan (6.1) disebut **persamaan karakteristik** A .

Contoh

Carilah nilai – nilai eigen dan basis-basis untuk ruang eigen dari

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Jawab:

Persamaan karakteristik

$$\begin{aligned} \lambda I - A &= \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda - 3 & -2 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix} \\ \det(\lambda I - A) &= (\lambda - 3)\lambda - (-2) = 0 \\ &= \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \\ &\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1 \end{aligned}$$

Jadi nilai – nilai eigen dari A adalah $\lambda_1 = 2$ dan $\lambda_2 = 1$

Ruang vektor:

$$\begin{bmatrix} \lambda - 3 & -2 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Jika $\lambda = 2$ diperoleh:

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} -x_1 - 2x_2 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 &= 0 \end{aligned}$$

Dengan eliminasi diperoleh: $x_1 = -2s$, $x_2 = -s$

Jadi vektor-vektor eigen dari A yang bersesuaian dengan λ adalah vektor-vektor tak nol yang berbentuk:

$$x = \begin{bmatrix} -2s \\ -s \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Jadi basisnya adalah: $\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$ untuk $\lambda = 2$

Cara Maple

> with (LinearAlgebra) :

Mendefinisikan matriks

> A := matrix(2,2,[3,2,-1,0]);

$$A := \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Persamaan Karakteristik

> det(lambda*(LinearAlgebra:-IdentityMatrix(2,2))-A);
 $-3\lambda + \lambda^2 + 2$

Nilai eigen

> eigenvalues(A);

2, 1

Vektor eigen

> eigenvectors(A);

$[1, 1, \{[-1 \ 1]\}], [2, 1, \{[-2 \ 1]\}]$

Untuk λ diperoleh vektor eigen = [-2, 1] dan λ diperoleh vektor eigen = [-1,1].

Diagonalisasi

Definisi:

Sebuah matriks bujursangkar A dikatakan dapat didiagonalisasi jika terdapat sebuah matriks P yang dapat dibalik sedemikian rupa sehingga $P^{-1}AP$ adalah sebuah matriks diagonal, P dikatakan mendiagonalisasi A

Contoh:

Tentukan sebuah matriks P yang mendiagonalisasi

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

Persamaan karakteristiknya

```
> restart;
> with(linalg):
> A:=matrix(3,3,[0,0,-2,1,2,1,1,0,3]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 0 & 0 & K2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

```
> det((lambda*LinearAlgebra:-IdentityMatrix(3,3)-A));
```

$$8|K5|^2C|3K4$$

```
> eigenvalues(A);
```

$$1, 2, 2$$

```
> eigenvectors(A);
```

$$[1, 1, \{[K2 \ 1 \ 1]\}], [2, 2, \{[K1 \ 0 \ 1], [0 \ 1 \ 0]\}]$$

```
> P:=matrix(3,3,[-2,-1,0,1,0,1,1,1,0]);
```

$$P := \begin{bmatrix} K2 & K1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

```
> a:=evalm(inverse(P));
```

$$a := \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

> `b:=evalm(A&*P);`

$$b := \begin{bmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

> `evalm(a&*b);`

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Diagonalisasi Ortogonal

Definisi:

Jika A adalah sebuah matriks simetriks, maka:

- Nilai eigen matriks A semuanya adalah bilangan real.
- Vektor eigen yang berasal dari ruang eigen yang berbeda saling ortogonal.

Contoh soal:

Tentukan sebuah matriks Ortogonal P yang mendiagonalisasi

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian: