SOLUSI MID SEMESTER AL JABAR LINEAR

Selesaikan Soal berikut

1. Selidiki apakah semua pasangan himpunan bilangan real (*x*, *y*) adalah ruang vector dengan operasi $(x, y) + (x', y') = (x + x' + 1, y + y' + 1)$ dan $k(x, y) = (kx, ky)$

Jawab:
Bukan ruang vektor
Ambil $\underline{u} = (x, y)$, dan $\underline{v} = (x', y')$

(v) $\underline{u} + (-\underline{u}) = (x, y) + (-x, -y)$
$= (x + (-x) + 1), (y + (-y) + 1)$
$= (1,1)$

tidak memenuhi $\underline{u} + (-\underline{u}) = o$

(vii) $k(u + v) = k(x + x' + 1, y + y' + 1)$
$= (kx + kx' + k, ky + ky' + k)$
$= (kx.ky + k) + (kx', ky' + k)$
$= k((x, y) + 1) + k((x', y') + 1)$
$= k(u + 1) + k(v + 1)$

tidak memenuhi $k(u + v) = ku + kv$

(viii) $(k + l)u = k + l(x, y)$
$= (k + l)x, (k + l)y$
$= (kx + lx), (ky + ly)$
$= (kx + lx + 1), (ky + ly + 1)$
$= (kx + lx) \neq (kx + lx + 1)$ jadi tidak memenuhi $k(u + v) = ku + kv$

Karena aksioma (v), (vii) dan (viii) gagal maka himpunan tersebut bukan ruang vektor

2. Selidiki manakah himpunan berikut merupakan subruang di R^3
   a. Semua vektor yang berbentuk (*a*, 0, 0)
   b. Semua vektor yang berbentuk (*a*, *b*, *c*) dimana b = a + c

Jawab:

a. Misalkan $\underline{u} = (u_1, 0,0)$, dan $\underline{v} = (v_1, 0,0)$ pada W
$\underline{u} + \underline{v} = (u_1 + u_2, 0,0)$
$k\underline{v} = (kv_1, 0,0)$
$\underline{u} + \underline{v}$ dan $k\underline{v}$ pada W jadi merupakan subruang di R^3

b. Misalkan $\underline{u} = (u_1, u_1 + u_3, u_3)$, dan $\underline{v} = (v_1, v_1 + v_3, v_3)$ pada W
$\underline{u} + \underline{v} = (u_1 + v_1, u_1 + u_3 + v_1 + v_3, u_3 + v_3)$
$= (u_1 + v_1, (u_1 + v_1) + (u_3 + v_3), u_3 + v_3)$
$k\underline{v} = (kv_1, kv_1 + kv_3, kv_3)$
$\underline{u} + \underline{v}$ dan $k\underline{v}$ pada W jadi merupakan subruang di R^3

3. Nyatakanlah $5 + 9x + 5x^2$ sebagai kombinasi linear dari $p_1 = 2 + x + 4x^2, p_2 = 1 - x + 3x^2$ dan $p_3 = 3 + 2x + 5x^2$

Jawab:

$5+9x+5x^2=k_1(2+x+4x^2)+k_2(1-x+3x^2)+k_3(3+2x+5x^2)$

Dari persamaan di atas diperoleh SPL

$5 \quad = 2k_1+k_2+3k_3$

$9x \quad = xk_1-xk_2+2xk_3$

$5x^2 = 4x^2k_1+3x^2k_2+5x^2k_3$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 9 \\ 4 & 3 & 5 & 5 \end{bmatrix} / \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 1 & 1 & 2 & 9 \\ 4 & 3 & 5 & 5 \end{bmatrix} / \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{13}{2} \\ 0 & 1 & -1 & -5 \end{bmatrix} /$$

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 13 \\ 0 & 1 & -1 & -5 \end{bmatrix} / \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \end{bmatrix} / \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -13 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$

$k_1=-13, k_2=4$ dan $k_3=9$

Jadi kombinasi linearnya adalah $5+9x+5x^2=-13p_1+4p_2+9p_3$

4. Untuk nilai β yang manakah vektor-vektor berikut membentuk sebuah himpunan yang tak bebas linear di dalam R^3?

   $v_1=\left(\beta,-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$, $v_2=\left(-\frac{1}{2},\beta,-\frac{1}{2}\right)$ dan $v_3=\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\beta\right)$

Jawab:

v_1, v_2, v_3 tak bebas linear berarti

$k_1v_1+k_2v_2+k_3v_3=0$ dimana k_1,k_2,k_3 tidak semuanya nol

$k_1\left(\beta,-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)+k_2\left(-\frac{1}{2},\beta,-\frac{1}{2}\right)+k_3\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\beta\right)=0$

Sehingga diperoleh SPL

$\beta k_1-\frac{1}{2}k_2-\frac{1}{2}k_3=0$

$-\frac{1}{2}k_1+\beta k_2-\frac{1}{2}k_3=0$

$-\frac{1}{2}k_1-\frac{1}{2}k_2+\beta k_3=0$

Dengan OBE diperoleh: (diserahkan kepada pembaca untuk menentukan determinannya)

$b^3 \text{ K } \frac{3}{4} b \text{ K } \frac{1}{4} = \frac{1}{4}(b \text{ K } 1)(2b \text{ C } 1)^2$ Sehingga

Nilai β $1, \frac{\text{K} 1}{2}, \frac{\text{K} 1}{2}$